

Počátky booleovské algebry

*
**

George Boole (1815-1865)
a matematická analýza logiky

Doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky

FIT ČVUT v Praze

Úvodní poznámky

Geometrie a algebra

přispěly

k vývoji matematické logiky a informatiky
rozdílným způsobem.

Axiomatizace geometrie

vedla matematiky ke snahám
o vytvoření axiomatického systému logiky.

Algebra představovala model (vzor)

k napodobení při vytváření logického kalkulu.

Úvodní poznámky 2

Již v 17. STOLETÍ zkoumal
Gottfried Wilhelm Leibniz
souvislosti

1. mezi **disjunkcí a konjunkcí výroků**
a
2. mezi **sčítáním a násobením čísel**,

ale nedokázal přesně formulovat
základ logického kalkulu.

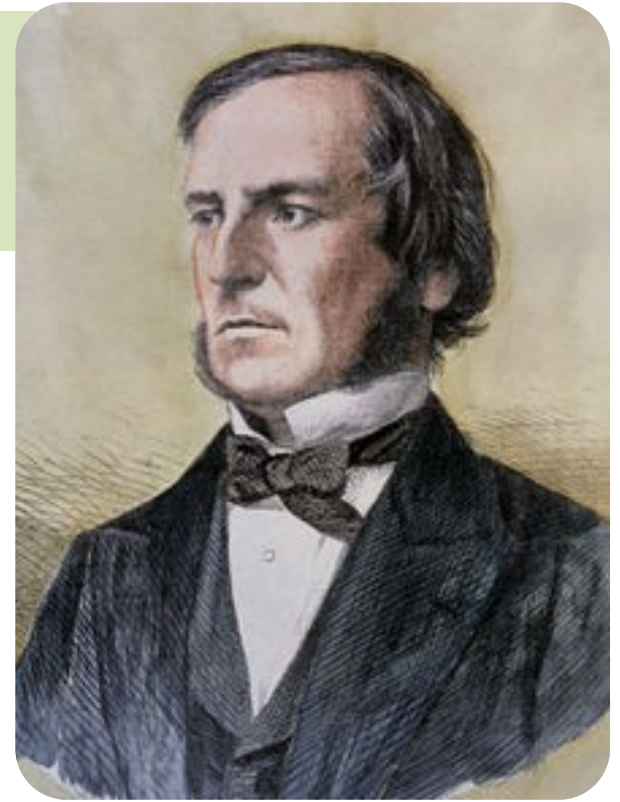
O čem budeme dnes mluvit:

V přednášce budou uvedeny

- životní osudy George Boolea
- historické souvislosti vzniku binární Booleovy algebry
- Booleovy výsledky ve srovnání s některými jeho předchůdci, současníky a pokračovateli.

George Boole

- 2. listopadu 1815
Lincoln, Anglie
- 8. prosince 1864
Ballintemple u Corku,
Irsko
- Britský matematik a filosof,
známý jako objevitel
základů moderní aritmetiky,
nazvané později Booleovou algebrou.
- Je považován za jednoho ze zakladatelů informatiky.



První Booleovy kroky

Teprve v pojednání

The Mathematical Analysis of Logic (1847)

George Boole vyjádřil, že:

„Algebraické formule mohou být použity
k vyjádření logických vztahů.“

I když se touto myšlenkou zabýval již v mládí,

kdy působil na soukromé škole v **Lincolnu**

a vzdělával se samostatně studiem získané literatury.

Booleův respekt mezi matematiky

Respekt mezi matematiky získal již dříve pojednáním o lineárních diferenciálních rovnicích

A General Method in Analysis (1844).

Svémi úvahami v práci z roku 1847 přispěl podstatně:

- ke snahám o vytvoření axiomatického systému logiky
- k zobecnění algebraického uvažování
- k vytvoření pojmu operátor
- k vývoji symboliky
- k zavedení a separaci některých symbolů.

Booleovy objevy

George Boole dospěl ke dvěma důležitým objevům:

1. **Lze uvažovat o algebrách, které se týkají objektů, jež nejsou v obvyklém smyslu slova čísla.**
2. **Algebra a její metody mohou být rozvíjeny jako abstraktní počet v různých interpretacích.**

K čemu dospěl George Boole?

Algebra se tedy nemusí týkat jen různých typů čísel od přirozených ke komplexním ...,

Vlastnosti operací - např. **komutativita, distributivita** mohou být zkoumány na jiných objektech než numerických.

10101010

Kromě základů logiky se George Boole věnoval diferenciálním rovnicím a teorii pravděpodobnosti.

George Boole – život

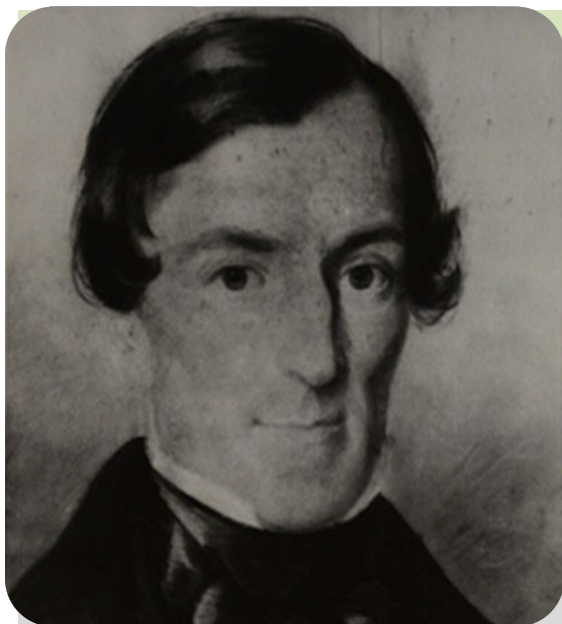
Otec: **John Boole** (1779–1848)

obchodník a švec v Lincolnu.

- Svého syna vyučoval z počátku sám.
- Otec John měl jen základní školní vzdělání, ale velký zájem o exaktní obory, formální a akademické vzdělání.

William Brooke, knihkupec v Lincolnu,
pomáhal Georgeovi s latinou,
kterou se George učil
v Thomasově škole v nedalekém Bainbridge.

Mládí



Později Boole pracoval v místním
Ústavu mechaniky v Lincolnu,
založen roce v 1833.

Sir Edward Bromhead, který znal
Georgeova otce Johna Boolea
(díky jeho činnosti v Ústavu),
pomáhal Georgeovi se získáváním
matematických knih.

- 1831 - George dostal např. učebnici Sylvestra Françoise Lacroixe od Rev. George Stevense Dicksona od sv. Swithina v Lincolnu.

George Boole jako samouk se **bez učitele** stal
během několika let mistrem v matematické analýze.

Boole – schoolmaster

- Jako samouk studoval George moderní jazyky.
- **V 16 letech se Boole stal živitelem svých rodičů a 3 mladších sourozenců.**
- Získal možnost vyučovat v Doncasteru, v Heigham's School.
- Učil také krátce v Liverpoolu.



- **1834 – založil vlastní školu! Bylo mu 19 let.**

Poznámka: Na obrázku je škola v Pottersgate v Lincolnu.

- 1835 – přednáška o výsledcích Isaaca Newtona ...!

Okno na paměť
George Boolea
v katedrále
v Lincolnu



První matematické práce

- **1838 – píše první matematické pojednání (23 let)**
- 1839 – navštěvuje Cambridge, setkání s **Duncanem Gregorym**, redaktorem časopisu *Cambridge Mathematical Journal* (CMJ)
- 1842 – zahajuje korespondenci s **Augustem de Morganem**, celoživotním přítelem
- 1844 – korespondence s **Arthurem Cayleym** (inicialy Cayley), celoživotní přátelství.
- 1844 – **Zlatá medaile Královské společnosti za práci o diferenciálních rovnicích**
- 1845 – přednáška na výročním zasedání British Association for the Advancement of Science, setkání s **Williamem Thompsonem (později lord Kelvin)**, celoživotní přátelství



Diferenciální rovnice

- Pojednání *o diferenciálních rovnicích*, 1859
- Pojednání *o počtu konečných diferencí*, 1860
(*Calculus of Finite Differences*)
- V 16. a 17. kapitole prvního díla o *diferenciálních rovnicích* najdeme **přehled obecných symbolických metod a obecnou analytickou metodu**, kterou už popsal dříve v článku v časopise *Philosophical Transactions* (1844).
- Během několika posledních let svého života pracoval Boole na druhém vydání svých *Differential Equations* a část posledních prázdnin strávil v londýnských knihovnách Royal Society a Britského Musea, ale dílo nedokončil.
- Isaac Todhunter vytiskl rukopis v 1865.

Teorie pravděpodobnosti

- Druhá část ***Laws of Thought (1854)*** vysvětluje základní metody teorie pravděpodobnosti:
- **Jeho cíl je algoritmický:**
z daných pravděpodobností nějakého souboru událostí určit důsledek:
pravděpodobnost jiné dané události logicky vyplývající z původního souboru událostí.

O pravděpodobnosti

- Probability is expectation founded upon partial knowledge.

(Praděpodobnost je očekávání založené na částečné znalosti.)

A perfect acquaintance with all the circumstances affecting the occurrence of an event would change expectation into certainty, and leave nether room nor demand for a theory of probabilities.

(Dokonalá znalost všech okolností ovlivňující výskyt události může ovlivnit očekávání v jistotě a nezanechat ani prostor ani požadavek na teorii pravděpodobnosti.)

Analýza

- V roce 1857 Boole vydal dílo nazvané ***On the Comparison of Transcendents, with Certain Applications to the Theory of Definite Integrals***, v němž se věnoval součtu reziduí racionální funkce. Mezi jinými výsledky dokázal též dnes nazvanou **Booleovu identitu**:

$$\text{mes} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \Re \frac{1}{\pi} \sum \frac{a_k}{x - b_k} \geq t \right\} = \frac{\sum a_k}{\pi t}$$

pro reálná čísla $a_k > 0$, b_k a $t > 0$.

- Zobecnění této identity hraje důležitou roli v teorii Hilbertových transformací.

Symbolická logika

V roce 1847 Boole vydal

The Mathematical Analysis of Logic.

- Později ji považoval za chybné vysvětlení svého logického systému
a zdokonalil výklad v pojednání
- ***An Investigation of the Laws of Thought (1854),
On which are Founded the Mathematical Theories of Logic
and Probabilities***

Dílo je považováno za vyzrálé vyjádření jeho názorů.

I když je to obecně rozšířeno,
Boole neměl nikdy v úmyslu kritizovat
nebo nesouhlasit se základními principy Aristotelovy logiky.
Spíše ji chtěl uspořádat,
postarat se o její základy
a rozšířit okruh jejího použití.

Booleova algebra

Booleova algebra je úplný systém

{S: {x, 0, 1}, =, 3 operátory výrokové logiky $\wedge$, $\vee$, $\neg$ odpovídají „ $\cdot$ “, „ $+$ “, „ $'$ “ .}

- **P1:** Pro každou operaci na S platí:

$$(a) \quad x + 0 = x \quad \text{a} \quad x \cdot 1 = x$$

neutralita 1 a 0

$$(b) \quad x \cdot 0 = 0 \quad \text{a} \quad x + 1 = 1$$

agresivita 1 a 0

Booleův pohled -> logika není jen částí matematiky

- Podle George Boolea mohou být **logické výroky vyjádřeny pomocí algebraických rovnic.**
- Algebraické úpravy symbolů v rovnicích mohou být bezpečnou metodou pro logické odvozování (deduktivní postupy): t.j.
logika je jen určitý typ algebry.
- 1 (jednotkou) označuje Boole „universum myslitelných objektů“.
- Symboly, souhlásky a samohlásky jako x, y, z, v, u , atd. , užívá ve „výběrovém„ významu pro adjektiva a podstatná jména přirozeného jazyka.
- Takže, jestliže $x = \text{rohatá}$ a $y = \text{ovce}$, pak postupný výběr vyjádřený pomocí x a y , jestliže je spojíme třídu „**rohatých ovcí**“.
- $(1 - x)$ vyjadřuje všechny objekty v univerzu, které nejsou rohaté, to jest, žádné rohaté objekty,
- $(1 - x)(1 - y)$ vyjadřuje objekty, které nejsou ani rohaté, ani ovce.

Booleova algebra 2

- **P2:** Operace jsou **komutativní** pro každé x a y množiny S takto:

$$(a) \quad x + y = y + x \quad a \quad (b) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

- **P3:** Operace jsou **asociativní**.

Pro každé x, y, z z množiny S platí:

$$(a) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad a \quad (b) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

- **P4:** Operace jsou **distributivní**.

Pro každé x, y, z z množiny S platí:

$$(a) \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad a$$

$$(b) \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

Booleova algebra 3

- P5: Zákon dvojité negace

$$x'' = x$$

Poznámka: Negace booleovské proměnné x' odpovídá negaci výrokové formule $\neg X$.

- P6: Zákon vyloučeného třetího

$$x + x' = 1 \quad \text{a} \quad x \cdot x' = 0$$

- P7: Zákon absorpce

$$x + x = x \quad \text{a} \quad x \cdot x = x$$

$$x + x \cdot y = x \quad \text{a} \quad x \cdot (x + y) = x$$

Booleova algebra 4

- P8: Zákon absorpce negace

$$\begin{array}{ll} x + x' \cdot y = x + y & \text{a} \quad x' + x \cdot y = x' + y \\ x \cdot (x' + y) = x \cdot y & \text{a} \quad x' \cdot (x + y) = x' \cdot y \end{array}$$



- P9: De Morganovy zákony

$$(x + y)' = x' \cdot y' \quad \text{a} \quad (x \cdot y)' = x' + y'$$

Pojem logické funkce

Logickou funkcí budeme nazývat takovou operaci mezi výrokovými formulami, která po hodnocení prvotních formulí jednoznačně určí pravdivostní hodnotu výsledné složené formule z $\{0,1\}$.

Výrokové formule – výpovědi o objektech. Skupinu všech objektů, na něž je funkce aplikovatelná nazveme **oborem logické funkce**.

Konstanty a proměnné

De Morganova symbolika

Každé X je Y.

$X \supset Y$

Každé Y je X.

$X \supset Y$

E. Žádné X není Y.

$X \supset Y$

e. Všechno je X nebo Y nebo oboje.

$X \vee Y$

I. Některá X jsou Y.

$X \wedge Y$

i. Existují objekty, které nejsou ani X ani Y.

$X \wedge Y$

O. Některá X nejsou Y.

$X \wedge Y$

o. Některá Y nejsou X.

$X \wedge Y$

- **Augustus de Morgan (1806-1871)**
je spojován se zákony, které se užívají
např. k negaci složených a kvantifikovaných výroků.
- V roce 1847 přispěl ale také pozoruhodným způsobem
k modernizaci symboliky v pojednání nazvaném *Formal Logic*.

De Morgan na slepé cestě

- De Morganův návrh patří ve vývoji symboliky ke slepým cestám, přesto přispěl k rozvoji formalizace našeho myšlení.
- Ve stejné roce - 1847 - vydal George Boole pojednání *The Mathematical Analysis of Logic* a použil k formalizaci výroků **aritmetické operátory** a symbol „ $\vee$ “ k označení obecného kvantifikátoru a hledal další možnosti symbolického vyjádření kvantifikovaných výroků.

Uznání Augusta de Morgana

De Morgan:

“Mr. Boole’s generalization of the forms of logic is by far the boldest and most original . . . ”



De Morganovo uznání

„Booleův logický systém je jen jednou z mnoha ukázek skloubení geniality a trpělivosti.

Dokud to nedokázal, nikdo by nevěřil, že symbolické postupy algebry, které byly vytvořeny jako nástroj numerických výpočtů, byly schopny vyjádřit libovolný myšlenkový krok a vybavit všezahrnující systém logiky gramatikou a slovníkem.“

Kvantifikátory

- Booleovo vstupní pojednání o logice vzbudilo diskusi o kvantifikaci mezi **skotským** logikem **Sirem Williamem Hamiltonem**, který podporoval „teorii kvantifikování predikátu“ a Booleovou oporou **Augustem de Morganem**, kterému vděčíme za porozumění dualitě operací. Booleův přístup způsobil, že obě strany zůstaly v nesouladu.

- Diskuse se týkala výroků např.

Všechna A jsou všechna B .

Všechna A jsou některá B

Tehdy vznikla tradice tzv. „**algebry logiky**“ neboli **algebraické logiky** nebo **booleovské algebry**.

Aristotelská logika v MAL

- Boole se nejprve se zabývá **distributivním zákonem** $x(u + v) = xu + xv$.
Říká, že součet $u + v$ znamená rozdělení třídy na dvě části - **první zmínka o sčítání**.
- Dále na str. 17 se věnuje **komutativnímu zákonu** $xy = yx$ a **zákonu idempotence** $x^2 = x$ (Boole – indexový zákon)
- Třídu non-X popisuje jako $1 - x$.
Je to **první výskyt odčítání** v kapitole
O výrazu a interpretaci.

Indexový zákon

$$x^2 = x$$

$$x \cdot x = x$$

- Indexový zákon považuje Boole za nejdůležitější ze všech svých úvah!
- Zákon idempotence (dnešní název zákona)

Př. 1. Zjednoduš: $AB(A + B)(B + B)$:

Výraz

Co jsme použili

- $AB(A + B)(B + B)$
- $AB(A + B)$
- $ABA + ABB$
- $AB + AB$
- AB

Původní výraz

Distributivní zákon.
Identita

Indexový zákon

Identita

Příklady

Zjednoduš booleovské výrazy na minimální počet literálů:

- a) $xy + xy'$
- b) $(x+y)(x+y')$
- c) $xyz + x'y + xyz'$
- d) $(A + B)' (A' + B')'$

Aristotelská logika v MAL - 2

- Zkoumá 4 typy kategorických výroků a několik typů hypotetických výroků:
- Všechna X jsou Y $xy = x$
- Konverze ... $x(1-y) = 0$

První výskyt 0 v MAL – neznamená prázdnou třídu. Prázdná třída se v MAL nevyskytuje.

Rovnice $E = 0$ – třída označená E neexistuje.

Aristotelská logika v MAL 3

- Některá X jsou Y $v = xy$

$$vx = vy$$

Důsledek: $v(1 - x) = v(1 - y)$

Podle Boolea nelze číst

„Některá non- X jsou non- Y “.

Symbol v užívá pouze v premisách.

Příklad eliminace y

- Předpoklady (premisy) sylogismu obsahují třídy X , Y , Z .
Chceme vyloučit Y .
- Boole zapíše předpoklady takto:

$$ay + b = 0$$

$$a'y + b' = 0$$

Důsledek:

$$ab' - a'b = 0$$

Vede však algebraicky k triviálnímu závěru, ačkoliv aristotelský sylogismus je netriviální.

$$\text{Premisy} \Rightarrow ay = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

(Úpravy učinil Boole v Laws of Thought.)

Latina a lingvistika

- Ve 12 letech ovládal latinu a začal se sám učit řečtinu.
- K překladům jej přivedl otec, když mu bylo 14 let, přeložil *Ódu na jaro* pro *Lincoln Herald*.
- Volné chvíle věnoval studiu dalších jazyků.
Učil se francouzsky, německy i italsky,
nejen gramatiku jazyků,
ale také literaturu a schopnost mluvit.
- Boole oceňoval jistě krásu matematiky,
ale také krásu poesie,
prostředku, jímž lze vyjádřit pocity a city.
- V mládí obdivoval italského básníka Danteho (1265-1321) .

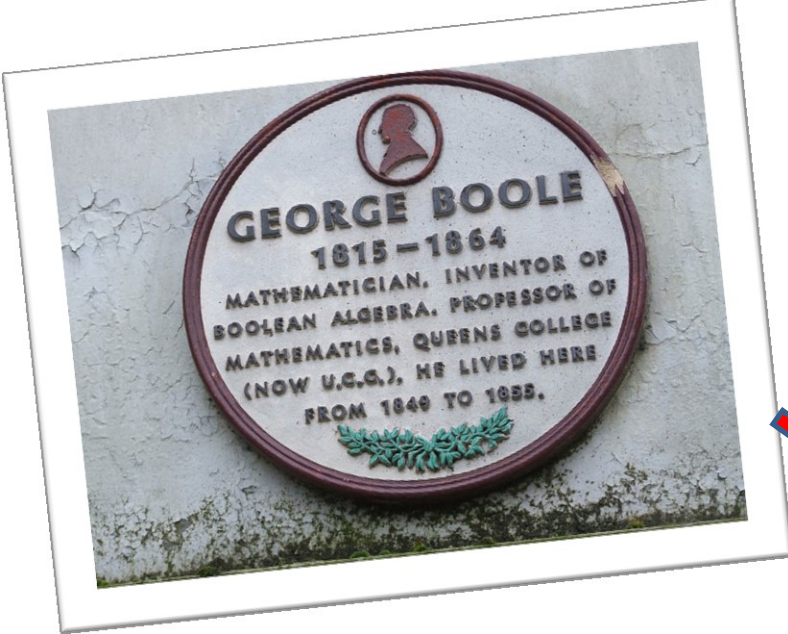
Poesie

- Obdivoval poesii Johna Miltona (1608-71) a **velice rád předčítal jeho verše nahlas posluchačům.**
Obdivoval i velkého romantického básníka Williama Wordsworthe (1770-1850).
- **Sám Boole psal verše ve chvílích odpočinku .**
Vybíral si náboženská témata, klasiku a přátelství.
- Poezii se věnoval převážně v letech 1834 – 1849.
- Pak se stal profesorem matematiky na Queen's College v irském Corku

Boole - profesorem v Corku

Booleovo postavení matematika bylo potvrzeno v roce 1849.

- Stal se profesorem matematiky na **Queen's College, v Corku v Irsku.**
- Potkal zde budoucí manželku, **Mary roz. Everest,** když v roce 1850 navštívila svého strýce Johna Ryalla, profesora řečtiny.
- Boole nepřerušil své vztahy k rodnému městu Lincolnu, např. podporoval snahy E. R. Larkena redukovat prostituci.
- Boole se stal **členem Royal Society** v roce 1857 a získal **čestný doktorát z universit v Dublinu a Oxfordu.**



Cork



Vášnivý klavírista

- Současný výzkum ukazuje,
že byl George Boole dobrý hudebník.
- Ve svém bytě měl pianoforte (Grenville Place 5)
- Můžeme spekulovat, že při hře pozoroval z okna pomalu plynoucí řeku Lee.
- Hrál Chopina nebo Schuberta?
- Spojil svou lásku
k matematice s obdivem k hudbě?
- Zkoumal hudební kryptogramy typické pro Mozarta?

Další zájmy- fotografování

Boole - průkopník fotografování

- Považoval **fotografie za umělecká díla.**
- Při jednom setkání Cuvierian Society ukazoval krásné fotografie katedrály v Lincolnu.
- Při jiné příležitosti v oddělení umění promluvil o figurativních daguerotypiích francouzského průkopníka fotografického umění Louise Daguerra (1787-1851).

Vpravo: George Boole v polovině čtyřicátých let 19. století.



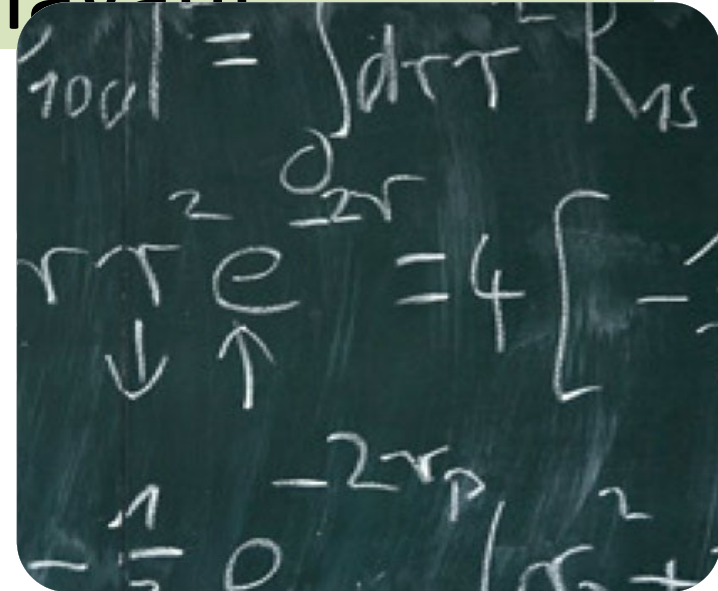
Boole a inovace ve vzdělávání

- Zavedl užívání **tabule!** →

- Essay on Education:

"The practice in our schools is to begin with the grammar and to end with the application.

We pass from the general formula to the particular instance, not as in the order of Nature's teaching from the particular to the general rule."



Cuvierian Society, Cork

- V roce 1835 byla v Corku založena **Cuvierian Society**, která měla spojovat lidi mající zájem o pěstování vědy literatury a umění.
- Boole byl v roce 1850 zvolen za člena a v roce 1854 se stal prezidentem společnosti.
- V roli prezidenta podporoval **'a conversazione for the educated classes'**, kterých se účastnilo až 1 400 lidí.
- Památná je jeho vynikající přednáška, která se konala večer 29. května 1855 **o rozdílech mezi vědou a uměním**. Vysvětlil také svou představu o nezbytnosti obou oblastí pro vývoj společnosti.
- Věnoval se též řecké a římské historii, filosofii a sochařství, výkladům gotické architektury.

Mary Everest Boole



V roce 1855 se oženil
s **Mary Everest**

1832 -1916
(neteří George Everesta),
která později napsala
několik naučných prací
o základních myšlenkách
svého manžela a
o svých metodách
vyučování matematice.

Rodina – 5 dcer

Booleovi měli pět dcer:

- **Mary Lucy Margret** (1856–1908) si vzala matematika **Charlese Howarda Hintona** a měli 4 děti: George (1882–1943), Eric (*1884), William (1886–1909)^l a Sebastian (1887–1923)
- **Margaret**, (1858 – 1935) se provdala za Edwarda Ingrama Taylora, umělce.
 - Jejich nejstarší syn **Geoffrey Ingram Taylor** se stal matematikem a členem Royal Society.
 - Jejich mladší syn Julian byl profesorem chirurgie.
- **Alicia** (1860–1940), matematicka, významné příspěvky ke 4-dimensionální geometrii.
- **Lucy Everest** (1862–1905), první profesorka chemie v Anglii
- **Ethel Lilian** (1864–1960) si vzala polského vědce a revolucionáře **Wilfrida Michaela Voyniche** a autora románu *The Gadfly* (*Otravný člověk*).

Závěr života



- V roce 1864 George cestou do školy zmokl, šel deštěm asi 2 míle, a pak učil v mokrých šatech, prochladl, dostal zápal plic.
- Manželka Mary uložila nemocného na lůžko a podle pokrokových metod jej polévala při horečce vodou. Georgeův stav se zhoršil.

Proč zemřel Boole ve vysokých horečkách?

- Mary Everest Boole, manželka, věřila, že **léčba má odpovídat příčině**.
- Protože onemocněl po promoknutí ve studeném dešti, tedy na něj lila do postele kbelíky vody.
...
- Později vydala *Philosophy and Fun of Algebra*, 1909

Z názorů Mary Boole

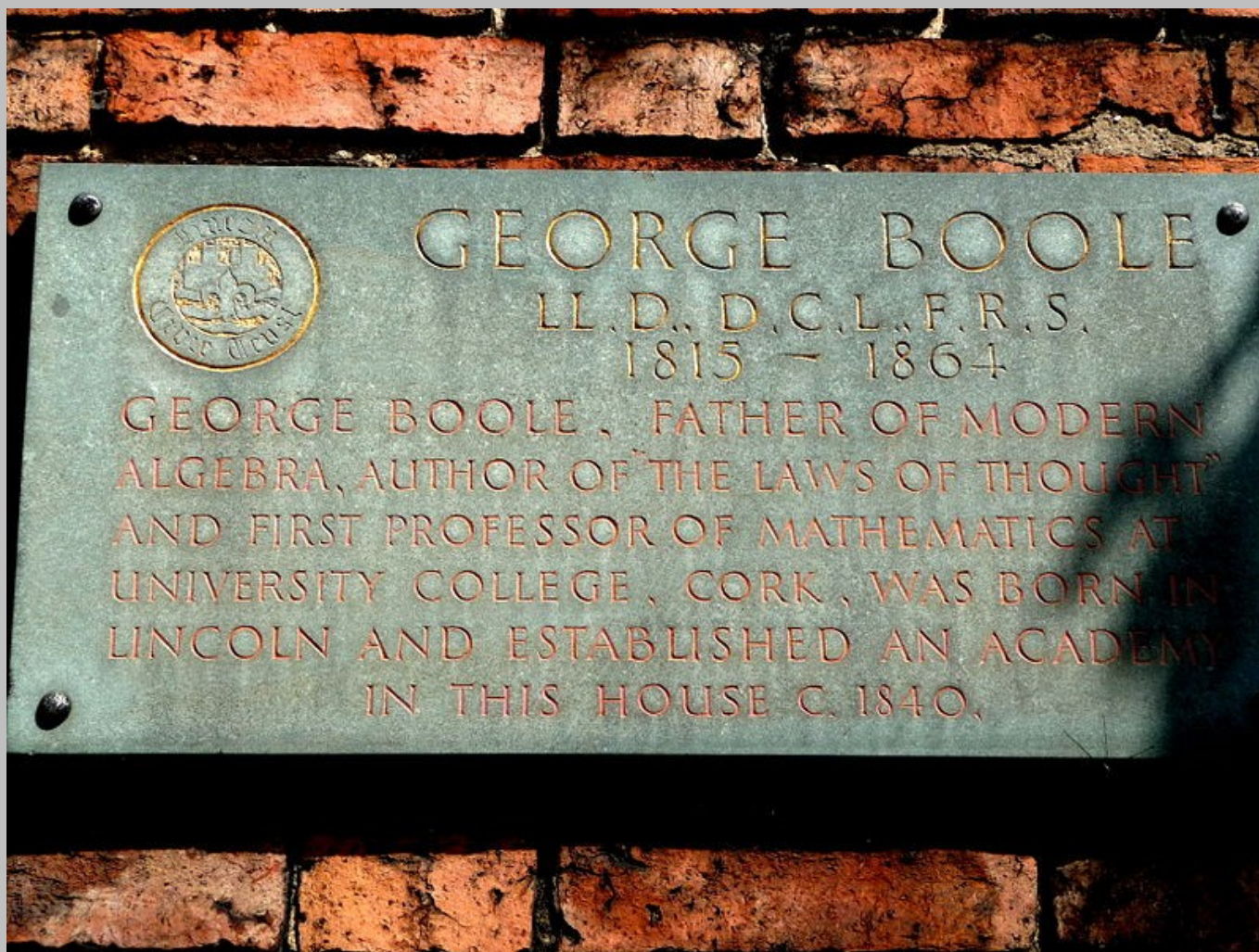
- „Andělé a druhé odmocniny záporných čísel ... jsou poslové z dosud nepoznané říše a přicházejí nám říci, kam máme dál směřovat; ukazují nám cestu, kterou se tam dostaneme a kam bychom nyní jít neměli.“
- Rovněž napsala, že [jeden výborný student matematiky v Cambridge] „začal přemýšlet o druhé odmocnině z minus jedné jako skutečné věci až z toho přestal spát a zdálo se mu, že se sám stal touto odmocninou a teď se nedokáže umocnit nazpět; tak z toho onemocněl, že se ani nemohl dostavit ke zkoušce.“

Hřbitov u sv. Michaela, Blackrock, Cork, Irsko



8. prosince 1864
George Boole
ve 49 letech zemřel.

Je pohřben na hřbitově
u kostela sv. Michaela
v Kostelní ulici
(Church Road)
v Blackrocku
- předměstí Corku,
v Irsku.



Pokračovatelé

Claude Shannon (1916 – 2001)

- seznámil se s Booleovou algebrou ještě jako student
- později zjistil, že lze tuto algebru použít k optimalizaci soustavy telefonních ústředen
- ukázal také, že reléové sítě lze použít k řešení problémů Booleovy algebry

George Boole s Shannonovou pomocí položil základy digitálního věku.

Lincoln, katedrála



Vlevo detail nejnižší třetiny okna –
dedikace Georgi Booleovi

Literatura

- George Boole: *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning.*
(London, England: Macmillan, Barclay, & Macmillan, 1847).

Prameny a literatura

Boole, G.: *On a General Method in Analysis*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. (134), 1844, 225-282.

Boole, G.: *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, 1847 (reprint Oxford 1948).

Boole, G.: *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded*

The Mathematical Theories of Logic and Probabilities, London, 1854

Kneale, W., Kneale, M.: *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1968 (4. vyd.)

Další literatura

- Chisholm, H. (ed., 1911): „Boole, George“. *Encyclopædia Britannica* (11th ed.). Cambridge University Press.
- Grattan-Guinness, I.: *The Search for Mathematical Roots 1870–1940*. Princeton University Press. 2000.
- Hill, F. (1974): *Victorian Lincoln*; Google Books.
- MacHale, D.: *George Boole: His Life and Work*. Boole Press. 1985.

